ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE COMPIEGNE

CONCOURS D'ADMISSION 1988 — Options : - Economique — Coefficients : 3

MATHEMATIQUES I

Mercredi 11 Mai 1988 de 8 H 00 à 12 H 00

NOTATIONS

1° Le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R} = (0, \vec{i}, \vec{j})$ ($\|\vec{i}\| = 1$ cm , $\|\vec{j}\| = 10$ cm)

On considère la fonction numérique φ définie par la relation :

$\varphi(x) = \frac{\ln x (\ln x - 1)}{x}$ et on note $\mathcal{C}_\varphi$ sa courbe représentative.

2° x est un élément de l'intervalle [-1,0], m et n sont deux entiers naturels

on pose $f_{m,n}(x) = x^m . (x+1)^n$

3° On note : $I_{m,n} = \int_{-1}^{0} f_{m,n}(x)\,dx$

PARTIE 1

Dans cette partie : $m \neq 0$ et $n \neq 0$

1° Montrer que $f_{m,n}$ est de classe C^∞

2°Montrer qu'il existe au moins une valeur c de l'intervalle]-1, 0[telle que $f'_{m,n}(c) = 0$.

3° Calculer c en fonction de m et n .

4° Donner les variations de $f_{m,n}$ sur [-1,0] . Discussion.

5° Montrer que $f_{m,n}$ admet un développement limité pour x au voisinage de 0 et donner ses trois premiers termes.

6° En déduire que, pour m pair, $\frac{1}{m+1}$ est une valeur approchée de $I_{m,n}$.

PARITE 2

1° Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, une relation de récurrence entre $I_{m,n}$ et $I_{m-1,\,n+1}$.

2° En déduire la valeur de $I_{m,n}$ en fonction de m, n et $I_{0,m+n}$.

3° Calculer $I_{0,m+n}$ et écrire $I_{m,n}$ en fonction de m et n.

4° Calculer l'intégrale : $\int_1^e x^n . (x-1)^m . dx$

5° En déduire la valeur de : $\int_1^e \frac{1}{x} . (\ln x)^n . (\ln \frac{x}{e})^m . dx$

6° Calculer : $\lim_{p \to +\infty} \left[\sum_{k=0}^{p-1} \frac{k^n . (k-p)^m}{p^{m+n+1}} \right]$

7° En utilisant $I_{m,n}$ et la formule du binôme, démontrer l'identité :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_{m+n}^{n} . C_{n}^{k} . (-1)^k}{m+k+1} = \frac{1}{m+n+1}$$

PARTIE 3

1° Donner le domaine de définition de φ.

Calculer les limites aux bornes du domaine.

Préciser les asymptotes de $\mathcal{C}_\varphi$

2° Montrer que φ est dérivable sur son domaine et calculer φ'.

Dresser le tableau de variation de φ.

3° Etudier la concavité de $\mathcal{C}_\varphi$.

4° $\mathcal{C}_\varphi$ coupe l'axe x'x en deux points.

Donner les équations des tangentes à $\mathcal{C}_\varphi$ en ces points.

5° Construire la courbe représentative $\mathcal{C}_\varphi$ de φ.

6° Montrer par récurrence que la dérivée d'ordre r ($r \in \mathbb{N}$) de φ , notée $\varphi^{(r)}$ est de la forme : $\frac{P(\ln x)}{x^{r+1}}$ où P est un trinôme du second degré.

7° Calculer l'aire comprise entre $\mathcal{C}_\varphi$ et l'axe x'x.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail